

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих на второй курс

1. ③ При всех значениях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x - \sin x)^\alpha}{x^2 + \sin \sqrt{x}} dx.$$

2. ④ Исследовать на сходимость при $x > 0$ и на равномерную сходимость на множествах $x \in (0, 10)$, $x \in (10, 100)$ и $x \in (100, +\infty)$ функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-x}{n+x} \right)^{n^2}.$$

3. ④ Рассматривается евклидово пространство \mathcal{E} — линейная оболочка функций $f(x) = 1$, $g(x) = x$ и $h(x) = x^2$, со скалярным произведением

$$(\phi, \psi) = \int_0^1 \phi(x)\psi(x) dx, \quad \phi, \psi \in \mathcal{E}.$$

Вычислить в \mathcal{E} ортогональную проекцию функции h на линейную оболочку функций f и g .

4. ④ Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = (z^2, z, 1)$ по контуру

$$L = \{ (x, y, z) : z = x^2 + y^2, 2x + 4y + z + 1 = 0 \},$$

ориентированному положительно относительно вектора $(0, 0, 1)$. Система координат декартова прямоугольная.

5. ⑤ Вычислить площадь поверхности

$$S = \{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 25, y^2 + z^2 \geq 9 \}.$$

ОТВЕТЫ И ИНСТРУКЦИЯ ПО ПРОВЕРКЕ

для поступающих на второй курс

1. ③ При всех значениях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x - \sin x)^\alpha}{x^2 + \sin \sqrt{x}} dx.$$

Ответ: сходится при $\alpha \in (-\frac{1}{6}, 1)$, расходится при остальных α .

Инструкция: Исследована особенность $x \rightarrow +0$ — 2 очка.

Исследована особенность $x \rightarrow +\infty$ — 1 очко.

2. ④ Исследовать на сходимость при $x > 0$ и на равномерную сходимость на множествах $x \in (0, 10)$, $x \in (10, 100)$ и $x \in (100, +\infty)$ функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-x}{n+x} \right)^{n^2}.$$

Ответ: Сходится при $x > 0$ по признаку Коши. Сходится неравномерно на $(0, 10)$ и $(100, +\infty)$ из-за отсутствия равномерной сходимости к нулю члена ряда. Сходится равномерно на $(10, 100)$ по признаку Вейерштрасса.

Инструкция: Доказана сходимость при $x > 0$ — 1 очко.

Исследована равномерная сходимость на одном множестве — 1 очко.

3. ④ Рассматривается евклидово пространство \mathcal{E} — линейная оболочка функций $f(x) = 1$, $g(x) = x$ и $h(x) = x^2$, со скалярным произведением

$$(\phi, \psi) = \int_0^1 \phi(x)\psi(x) dx, \quad \phi, \psi \in \mathcal{E}.$$

Вычислить в \mathcal{E} ортогональную проекцию функции h на линейную оболочку функций f и g .

Ответ: $x - \frac{1}{6}$.

Инструкция: Записаны условия на функцию $a + bx$ как на проекцию функции x^2 на $\text{Lin}\{1, x\}$: $(x^2 - a - bx, 1) = 0$ и $(x^2 - a - bx, x) = 0$ — 2 очка. Получена линейная система на a и b — 1 очко.

4. ④ Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = (z^2, z, 1)$ по контуру

$$L = \{ (x, y, z) : z = x^2 + y^2, 2x + 4y + z + 1 = 0 \},$$

ориентированному положительно относительно вектора $(0, 0, 1)$. Система координат декартова прямоугольная.

Ответ: -40π .

Инструкция: Циркуляция записана как поток ротора \vec{F} через поверхность

$$S = \{ (x, y, z) : 4 \geq (x+1)^2 + (y+2)^2, 2x + 4y + z + 1 = 0 \},$$

ориентированной нормалью $\vec{n} = (2, 4, 1)/\sqrt{21} - 1$ очко.

Вычислен $\text{rot } \vec{F} = (-1, 2z, 0) - 1$ очко.

Поверхностный интеграл представлен двойным интегралом Римана — 1 очко:

$$\iint_S (\text{rot } \vec{F}, \vec{n}) dS = \iint_{(x+1)^2 + (y+2)^2 \leq 4} (8(-1 - 2x - 4y) - 2) dx dy.$$

5. ⑤ Вычислить площадь поверхности

$$S = \{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 25, y^2 + z^2 \geq 9 \}.$$

Ответ: 80π .

Инструкция: Искомая площадь представлена как разность площади сферы радиуса 5 и площади части этой сферы внутри цилиндра — 1 очко.

Площадь части сферы внутри цилиндра представлена двойным интегралом Римана в терминах какой-либо параметризации — 2 очка:

например $x = \pm\sqrt{25 - y^2 - z^2}$ при $y^2 + z^2 \leq 9$.

Вычисление полученного двойного интеграла Римана — 2 очка:

$$\begin{aligned} 100\pi - 2 \iint_{y^2+z^2 \leq 9} \sqrt{1 + \frac{y^2 + z^2}{25 - y^2 - z^2}} dy dz &= \\ &= 100\pi - 2 \iint_{y^2+z^2 \leq 9} \frac{5 dx dy}{\sqrt{25 - y^2 - z^2}} = \\ &= 100\pi - 20\pi \int_0^3 \frac{r dr}{\sqrt{25 - r^2}} = 100\pi - 20\pi = 80\pi. \end{aligned}$$

ОЧКИ	ОЦЕНКА
0–2	НЕУД. (1)
3–4	НЕУД. (2)
5–6	УДОВЛ. (3)
7–8	УДОВЛ. (4)
9–10	ХОР. (5)
11–12	ХОР. (6)
13–14	ХОР. (7)
15–16	ОТЛ. (8)
17–18	ОТЛ. (9)
19–20	ОТЛ. (10)